EUCLIDES

MAANDBLAD
VOOR DE DIDACTIEK VAN DE WISKUNDE

ORGAAN VAN
DE VERENIGINGEN WIMECOS EN LIWENAGEL
EN VAN DE WISKUNDE-WERKGROEP VAN DE W.V.O.

MET VASTE MEDEWERKING VAN VELE WISKUNDIGEN
IN BINNEN- EN BUITENLAND

41e JAARGANG 1965/1966

IV — 15 DECEMBER 1965

INHOUD

P. NOORDHOFF NV — GRONINGEN

Het tijdschrift **Euclides** verschijnt in tien afleveringen per jaar. Prijs per jaargang *f* 8,75; voor hen die tevens geabonneerd zijn op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde is de prijs *f* 7,50.

De leden van *Wimecos* krijgen *Euclides* toegezonden als officieel orgaan van hun vereniging. Het abonnementsgeld is begrepen in de contributie en te betalen door overschrijving op postrekening 143917, ten name van Wimecos, Amsterdam. Het verenigingsjaar begint op 1 sept.

De leden van *Liwenagel* krijgen *Euclides* toegezonden voor zover ze de wens daartoe te kennen geven aan de Penningmeester van Liwenagel te Amersfoort; postrekening 87185.

Hetzelfde geldt voor de leden van de *Wiskunde-werkgroep van de W.V.O.* Zij kunnen zich wenden tot de penningmeester van de Wiskunde-werkgroep W.V.O. te Haarlem; postrekening 614418.

Indien geen opzegging heeft plaatsgehad en bij het aangaan van het abonnement niets naders is bepaald omtrent de termijn, wordt aangenomen, dat men het abonnement continueert.

Boeken ter bespreking en aankondiging aan Dr. W. A. M. Burgers te Wassenaar.

Artikelen ter opname aan Dr. Joh. H. Wansink te Arnhem.

Opgaven voor de „kalender" in het volgend nummer binnen drie dagen na het verschijnen van dit nummer in te zenden aan Drs. A. M. Koldijk, Joh. de Wittlaan 14 te Hoogezand.

Aan de schrijvers van artikelen worden gratis 25 afdrukken verstrekt, in het vel gedrukt; voor meer afdrukken overlegge men met de uitgever.

DE ALVERZAMELING

door

Dr. P. G. J. VREDENDUIN

Oosterbeek

Men hoort tegenwoordig vaak de bewering, dat het noodzakelijk is bij het vermelden van verzamelingen ook de alverzameling op te geven. B.v.

a. de alverzameling is de verzameling van de reële getallen; welke is de verzameling

$$\{x|x^2 + x > 1\}?,$$

b. de alverzameling is de verzameling van de punten in een plat vlak; welke is de verzameling

$$\{X|XP = XQ\}?$$

In het volgende wil ik trachten na te gaan of deze vermoeiende bezigheid nuttig en nodig is. Daartoe eerst enige voorbeelden uit het dagelijks leven.

Als ik de conciërge vraag, wie er vanmorgen te laat was, zal hij mij niet vertellen, dat mijn collega B. te laat was en evenmin, dat zijn dochter te laat voor de trein was. Hij weet, dat de „alverzameling" de verzameling van de leerlingen van onze school is, d.w.z. hij weet, dat ik daarover spreek. En als ik vraag, wie mijn collega S. er vanmorgen uitgestuurd heeft, dan weet men, dat ik niet bedoel de leerling, die het tweede uur binnenkwam om te vragen of hij zijn vulpen soms op de bank had laten liggen, en evenmin de mus die met veel moeite het raam weer uitgewerkt werd. Hier is de alverzameling de verzameling van de leerlingen, die S. vanmorgen les gegeven heeft en wel alleen beschouwd in die tijdsintervallen gedurende welke ze van S. les hadden.

De moraal van deze voorbeelden is, dat men in de omgangstaal de alverzameling niet expliciet zal vermelden, omdat impliciet duidelijk is, waarover men het heeft. Maar anderzijds weten we, dat juist in wiskundige taal dergelijke overwegingen nimmer een rol mogen spelen. De vraag rijst dus: heeft iemand, die jaren lang bij zijn onderwijs verzamelingen vermeld heeft zonder daarbij de alverzameling op te geven en die toch steeds begrepen is, het verkeerd

gedaan of is zijn handelwijze wetenschappelijk te verantwoorden?

In geformaliseerde taal redden we ons uit de moeilijkheid door aan variabelen van verschillende lettersoort een verschillende rol toe te kennen. Hetzelfde procédé kunnen we zonder bezwaar ook in niet geformaliseerde taal volgen. Als we met de algebra aanvangen, spreken we af, dat een letter een getal voorstelt. Wat voor soort getal, zal ervan afhangen, hoe ver we met de ontwikkeling van het getalsysteem gevorderd zijn. Is het reële getal eenmaal ingevoerd, dan stellen de letters reële getallen voor. Krijgt men de behoefte aan meer soorten letters, dan stelt men b.v. vast, dat de letters f, g, h functies voorstellen, de letters a, b, c, x, y, z reële getallen, de letters V, W, U verzamelingen, enz. Natuurlijk heeft men niet genoeg aan deze beperkte hoeveelheid letters; vandaar dat men ook toe zal staan de gekozen letters van indices of van accenten te voorzien. Zo nodig kan men afspreken, dat i en j (of m en n) natuurlijke getallen voorstellen, k en l gehele getallen. Men kan complexe getallen door kleine Griekse letters voorstellen. In de meetkunde zal men punten door hoofdletters, lijnen door kleine letters, vlakken door kleine Griekse letters voorstellen en de nodige verdere afspraken maken. Of hoofdletters punten in het platte vlak of punten in de ruimte voorstellen, zal er natuurlijk van afhangen, of we met planimetrie of met stereometrie bezig zijn. De gemaakte afspraken maken zo het expliciet vermelden van een alverzameling overbodig, omdat impliciet duidelijk is, welke de alverzameling is. En met dit impliciet duidelijk zijn wordt nu niet bedoeld een uit vage vooronderstellingen blijken, maar een wetenschappelijk verantwoord duidelijk zijn op grond van een aangenomen notatie.

Wat doen we nu, als we afgesproken hebben, dat kleine letters reële getallen voorstellen en we de verzameling van de rationale getallen willen beschouwen, waarvan het kwadraat groter dan 2 is? Zijn we dan toch gedwongen te beginnen met: „de alverzameling is de verzameling van de rationale getallen" en dan onze verzameling te noteren: $\{x|x^2 > 2\}$? Veel eenvoudiger is, dunkt me, te schrijven:

$$\{x|x^2 > 2 \text{ en } x \text{ is rationaal}\}.$$

We zijn dan in overeenstemming met de gemaakte afspraak, dat x een reëel getal voorstelt en hebben toch de gewenste verzameling op juiste wijze genoteerd.

Verbeeldt u eens, dat in een context gedefinieerd is op enigerlei wijze de verzameling V en dat daarbij afzonderlijk is vastgesteld, dat de alverzameling W is, dan zal men overal, waar in de tekst

verder „V" voorkomt, moeten blijven bedenken, dat W de alverzameling is. D.w.z. men moet eraan denken, dat met „V" bedoeld wordt „$V \cap W$". Waarom dan niet in de definitie van V opgenomen, dat men het uitsluitend over elementen van W heeft? Of om hetzelfde in concreto toe te lichten: wat is beter:

a. de alverzameling is de verzameling van de rationale getallen;

$$V = \{x|x^2 > 2\}$$

of

b. $$V = \{x|x^2 > 2 \text{ en } x \text{ is rationaal}\}?$$

In het eerste geval moet men, als men V door zijn definiens vervangt, zich bovendien herinneren, dat we het alleen over rationale getallen hebben, terwijl dat in het tweede geval niet hoeft, omdat het in de definitie van V expliciet opgenomen is.

Conclusie. Het telkens vermelden van de alverzameling is een overbodige bezigheid. Men kan beter afspraken maken omtrent de betekenis van gebruikte letters of de nodige beperkingen in de definitie van de verzameling zelf opnemen.

De moeilijkheden worden groter, als we complementverzamelingen gaan beschouwen. We beginnen weer met een niet-wiskundig voorbeeld. We gaan uit van

$$V = \{x|x \text{ is burgemeester van een Nederlandse gemeente}\}.$$

Wat is nu het complement van V? Het is duidelijk, dat de gemeentesecretaris van Arnhem tot dit complement behoort. Ik vermoed, dat de lezer er ook wel toe behoren zal. En de burgemeester van Keulen ook. Als ik u vraag of de baby van de een of andere Hottentot ertoe behoort, zult u met een zekere terughoudendheid toch nog wel „ja" antwoorden. Maar hoe zit het met mijn hond? Met de linkerhand van mijn buurman, het kladschrift van mijn zoontje en met de waterlelie in mijn vijver? Het getal 3, vriendelijkheid, de zomer van 1958? Behoren ze alle tot de complementverzameling van V? En zo neen, waar ligt de grens dan? Zijn we nu niet verplicht V te voorzien van een alverzameling en onder het complement van V te verstaan die elementen van de alverzameling, die niet tot V behoren? B.v. de alverzameling is de verzameling van de mensen en het complement van V bestaat dus uit alle mensen, die geen burgemeester van een Nederlandse gemeente zijn, het Hottentotkindje incluis? Of de alverzameling is de verzameling van de Nederlanders, waarna noch het Hottentotkindje noch de burgemeester van Keulen meer als elementen van het complement accep-

tabel blijken? Ik geef toe, dat in de omgangstaal er geen moeilijkheden plegen te ontstaan, maar dat neemt niet weg, dat we hier toch in de wiskunde de nodige voorzichtigheid in acht moeten nemen.

Nu een paar mathematische voorbeelden. Onderstel, dat

$$V = \{x | 3x + 5 = x - 1\}.$$

Dan is

$$V = \{x | x = -3\}.$$

Het complement van V noteren we V^C. Dan is

$$V^C = \{x | 3x + 5 \neq x - 1\} = \{x | x \neq -3\}.$$

Dit voorbeeld levert geen enkele moeilijkheid. Vooraf is gegaan een afspraak omtrent x, b.v. x stelt een reëel getal voor. De gevonden verzameling V^C is dan de verzameling van alle reële getallen, die ongelijk aan -3 zijn.

Een tweede voorbeeld levert al evenmin moeilijkheden. Als

$$V = \{x | 3x + 5 > x - 1\} = \{x | x > -3\},$$

dan is

$$V^C = \{x | \text{niet } 3x + 5 > x - 1\} = \{x | 3x + 5 \leqq x - 1\}$$
$$= \{x | x \leqq -3\}.$$

Als we reeds weten, dat x een reëel getal voorstelt, is het verkregen resultaat ook hier duidelijk.

We gaan nu uit van

$$V = \{x | \sqrt{(x - 1)} > 2\}. \qquad (1)$$

Hieruit volgt

$$V = \{x | x > 5\}. \qquad (2)$$

Letten we op (2), dan vinden we

$$V^C = \{x | \text{niet } x > 5\} = \{x | x \leqq 5\}.$$

Maar letten we op (1), dan verandert de situatie. Immers dan is

$$V^C = \{x | \text{ niet } \sqrt{(x - 1)} > 2\}.$$

Geldt nu b.v. $0 \in V^C$? D.w.z. is

$$\sqrt{(0 - 1)} > 2$$

een onware bewering? Hier staat onzin; er is hier geen sprake van een bewering en dus ook niet van een onware bewering. En dus zou

men niet kunnen volhouden, dat $0 \in V^C$. Of $0 \in V^C$ zou er dus van afhangen, welke schrijfwijze we voor V kiezen. Kiest men (2), dan is $0 \in V^C$. Kiest men (1), dan is dit niet het geval. Gelijke verzamelingen behoeven dus geen gelijke complementen te hebben. En dat is onaanvaardbaar.

Misschien zal men mij tegenwerpen, dat ik de zaak op de spits drijf. Op de vraag:

$$\text{is } \sqrt{(0-1)} > 2 \text{ een ware bewering?}$$

kan men immers met een gerust geweten „neen'' antwoorden. En op grond hiervan kan men dan toch wel volhouden, dat $0 \in V^C$?

Welnu, laten we het zo dan eens proberen. We geven dus toe, dat $0 \in V^C$, omdat de zinloze tekencombinatie

$$\sqrt{(0-1)} > 2$$

niet een ware bewering voorstelt. Wat nu te zeggen van

$$\sqrt{(1/0-1)} > 2$$
$$\sqrt{(\text{mijn goede humeur} - 1)} > 2$$
$$\sqrt{(\text{Euclides} - 1)} > 2?$$

Dit zijn ook geen ware beweringen, immers ook dit zijn zinloze tekencombinaties. Consequent doorredenerend zouden we dus moeten toegeven, dat tot de verzameling V^C behoren

1/0, mijn goede humeur, Euclides.

En hiermee hebben we ons steeds dieper in de narigheid gewerkt.

Onderstel, dat $E(x)$ een eigenschap van reële getallen voorstelt (b.v. $3x + 5 = x - 1$ of $\sqrt{(x-1} > 2)$. We komen dan dus in een labyrint terecht, als we onder het complement van de verzameling

$$V = \{x | E(x)\}$$

willen verstaan de verzameling

$$\{x | \text{niet } E(x)\}.$$

We moeten dus een andere weg inslaan om het complement te definiëren. Welke is duidelijk. We zullen onder het complement van V moeten verstaan de verzameling van de reële getallen, die niet tot V behoren. Dus

$$V^C = \{x | x \notin V\}.$$

In deze formulering behoeven we weer geen beroep te doen op een alverzameling, omdat nog steeds de afspraak omtrent de betekenis

van de letter x, nl. x stelt een reëel getal voor, van kracht blijft.

Ik geef toe, dat de laatste hindernis hiermee nog steeds niet genomen is. Laten we teruggrijpen op de verzameling

$$V = \{x|x^2 > 2 \text{ en } x \text{ is rationaal}\}.$$

Wat is hiervan het complement? Volgens het bovenstaande zijn we gebonden aan de afspraak, dat x een reëel getal voorstelt en zou V^C dus bestaan uit de verzameling van de reële getallen, die irrationaal zijn of een kwadraat $\leqq 2$ hebben. Inderdaad, maar misschien wil men het nu juist hebben over de verzameling van de rationale getallen, die een kwadraat $\leqq 2$ hebben. Is dat een ander complement van V? Neen, volgens onze definitie van V^C is dat niet het complement van V. Men kan deze verzameling desgewenst noemen het complement van V t.o.v. de verzameling Q van de rationale getallen. Ook kan men deze verzameling noteren: $Q \setminus V$ (het verschil van Q en V).

Conclusie. Als $V = \{x|E(x)\}$, dan kan men niet algemeen definiëren $V^C = \{x| \text{ niet } E(x)\}$. De oorzaak van de moeilijkheid, die deze definitie met zich mee zou brengen, is gelegen in de omstandigheid, dat $E(x)$ zonder betekenis kan zijn, terwijl x wel een reëel getal voorstelt. Bruikbaar is de definitie: $V^C = \{x|x \notin V\}$.

Analoge resultaten verkrijgt men bij de vorming van de vereniging van twee verzamelingen. Onder $V \cup W$ verstaat men de verzameling van elementen, die tot ten minste één van de verzamelingen V en W behoren. Als

$$V = \{x|E_1(x)\} \text{ en } W = \{x|E_2(x)\},$$

dan is dus

$$V \cup W = \{x|E_1(x) \text{ of } E_2(x)\}.$$

Juist deze laatste, algemeen gangbare, formulering, bergt onverwachte moeilijkheden in zich. Kies b.v.

$$V = \{x|1/x > 0\},$$
$$W = \{x|x^2 < 1\}.$$

Dan geldt

$$V = \{x|x > 0\},$$
$$W = \{x| -1 < x < 1\}$$

en dus

$$V \cup W = \{x|x > -1\}.$$

Beschouw nu de verzameling

$$U = \{x | 1/x > 0 \quad \text{of} \quad x^2 < 1\}.$$

Tot deze verzameling behoort niet het getal 0, omdat

$$1/0 > 0 \quad \text{of} \quad 0^2 < 1$$

geen ware bewering is, maar een zinloze tekencombinatie. Maar omdat $0 \in W$, is 0 wel degelijk element van de verzameling $V \cup W$. En dus is $U \neq V \cup W$.

We stuiten hier op dezelfde moeilijkheid als bij de definitie van V^c. We kunnen niet volhouden, dat algemeen

$$V \cup W = \{x | E_1(x) \quad \text{of} \quad E_2(x)\},$$

omdat van $E_1(x)$ en $E_2(x)$ de één zinloos kan zijn, terwijl de andere een ware uitspraak voorstelt.

De conclusie luidt in dit geval alleen, dat voorzichtigheid geboden is.

Welke consequenties voor het onderwijs hebben de voorgaande beschouwingen?

a. Het is af te raden de term alverzameling te gebruiken.

b. Het is aan te raden de term complementverzameling niet te gebruiken. In de enkele gevallen, waarin men aan deze term behoefte heeft, kan men zich behelpen met gebruik van de verschilverzameling

$$W \setminus V = \{x | x \in W \quad \text{en} \quad x \notin V\}.$$

c. Aan te bevelen is wel gebruik te maken van

$$V \cup W = \{x | E_1(x) \quad \text{of} \quad E_2(x)\}.$$

Dit is duidelijk en instructief. Komt men t.z.t. een geval tegen, waarin het niet klopt, dan kan men terloops erop wijzen, dat in uitzonderingsgevallen de uitspraak een correctie behoeft.

We leren onze leerlingen toch ook, dat

$$f(x) \cdot g(x) = 0$$

gelijkwaardig is met

$$f(x) = 0 \quad \text{of} \quad g(x) = 0,$$

hoewel we hier dezelfde incorrectheid begaan.

BERICHT OVER DE WERKZAAMHEDEN VAN DE COMMISSIE MODERNISERING LEERPLAN WISKUNDE

Men mag aannemen dat het bestaan van de Commissie Modernisering Leerplan Wiskunde genoegzaam bekend is in de kringen van belanghebbenden door de nu reeds viermaal georganiseerde cursussen in de moderne wiskunde.

Aan de reden van instelling van deze Commissie, gelegen in de snelle ontwikkeling van de wiskunde en het ten achter blijven van de schoolwiskunde bij deze ontwikkeling, behoeven nauwelijks woorden te worden gewijd. Men hoort echter meermalen het geluid: doet deze Commissie nog iets anders dan cursussen organiseren? Het tijdstip schijnt thans geschikt te zijn om in een kort bericht één en ander mede te delen over de werkzaamheden die zij verricht heeft en voortgaat te verrichten. Dat dit pas nu geschiedt heeft zijn goede redenen. De Commissie is ingesteld als een Commissie die aan de Minister van Onderwijs een rapport heeft uit te brengen. Zij heeft tot taak de Minister van advies te dienen. Zij kan daarom niet in volle openbaarheid werken. Slechts door de cursussen, georganiseerd in opdracht van de Minister, kon zij van haar activiteiten naar buiten doen blijken.

Nu de Commissie echter wegens proefnemingen met nieuwe of gewijzigde leerstof aan een aantal scholen noodzakelijkerwijze meer in de publiciteit treedt, lijkt het nodig iets te publiceren over de verrichte werkzaamheden.

1. *De wiskunde-cursussen.*

Reeds zeer spoedig is de Commissie bij haar beraadslagingen tot de overtuiging gekomen dat het noodzakelijk was cursussen voor leraren te organiseren. Zo zijn er thans, naar algemeen bekend zal zijn vier, gehouden, te weten:

september 1963: verzamelingenleer, logica, lineaire algebra;
januari 1964: lineaire analyse;
september 1964: topologie;
september 1965: groepentheoretische aspecten van de elementaire meetkunde.

Toelichting lijkt voor de lezers van dit tijdschrift niet nodig.

2. *Het meetkunde-project.*

Een subcommissie onder voorzitterschap van Prof. Freudenthal heeft zich belast met de bestudering van de problemen rond het onderwijs in de meetkunde in de onderbouw. Er bleken vrij positieve denkbeelden dienaangaande te bestaan. Onder meer was men van mening dat het begrip afbeelding sterk op de voorgrond zou moeten komen, ook met het oog op de algemene denkbeelden ten aanzien van het onderwijs in de bovenbouw. Dit heeft er toe geleid, dat onder auspiciën van de Commissie door de heren R. Troelstra en A. M. Kuipers een tekst is samengesteld voor een nieuwe en aan moderne visies aangepaste wijze van behandeling van de meetkunde in de eerste klasse. Een syllabus is samengesteld; voor zover de voorraad strekt, zijn exemplaren verkrijgbaar op het Secretariaat van de Commissie, Boothstraat 17, Utrecht. Aan 12 scholen wordt in de cursus 1965/1966 het meetkunde-onderwijs in de eerste klassen gegeven aan de hand van deze syllabus. Deze proefnemingen worden door de Commissie gevolgd en gecoördineerd, teneinde gegevens te verkrijgen over de resultaten.

De betrokken scholen zijn:

Coornhertlyceum	Haarlem,
Triniteitslyceum	Haarlem,
1e Christelijk Lyceum	Haarlem,
Spinozalyceum	Amsterdam,
R.K. Lyceum St. Bonaventura	Leiden,
Gemeentelijk Gymnasium	Tiel,
St. Aloysius College	's-Gravenhage,
John F. Kennedy H.B.S.	Dongen,
Rijks H.B.S.	Leeuwarden,
Dr. Aletta Jacobs Lyceum	Hoogezand-Sappemeer,
Bisschoppelijk College	Roermond,
Lorentz Lyceum	Eindhoven.

Aan een vervolg van dit project voor de tweede klasse wordt gewerkt. Dit zal tijdig gereed moeten zijn opdat de leerlingen, die thans in de eerste klasse zitten, in de tweede klasse volgens een aansluitend programma onderwijs zullen kunnen krijgen.

3. *Het algebra-analyse-project.*

Aanvankelijk heeft men gedacht projecten voor algebra en analyse gescheiden te kunnen behandelen. Dit bleek alras niet mogelijk, in het bijzonder toen de beraadslagingen zich gingen toespitsen op de stof voor de bovenbouw. Er zijn dan ook vele problemen :moet men radicaal nieuwe stof invoeren in de bovenbouw door struc-

turele inzichten meer op de voorgrond te zetten (groepen enz.) of is dit niet verstandig, hoever moet of kan men gaan bij de behandeling van de analyse, wat moet of kan er op dit punt in de onderbouw geschieden als voorbereiding tot de bovenbouw? Het is niet doenlijk alle problemen, die zich hier voordeden, op te sommen en men kan zich waarschijnlijk wel voorstellen dat hierover langdurige discussies werden en worden gevoerd.

De Commissie is tot de overtuiging gekomen dat het wenselijk is te beginnen met pogingen tot modernisering in de bovenbouw (4e en 5e resp. 5e en 6e klasse). Daarvoor zijn zekere richtlijnen door de Commissie samengesteld. Deze houden deels in de behandeling van nieuwe stof, deels de wijze van presentering van bestaande stof. Opgemerkt zij dat in dit schema ook stof is verwerkt die, bij een definitieve regeling, in de onderbouw zal moeten komen (bijv. verzamelingen enz.). Om een proefneming mogelijk te maken moest dergelijke stof nu uiteraard nog in een schema voor de bovenbouw worden opgenomen; verwacht wordt dus dat delen van de stof naar de onderbouw zullen penetreren. Een gedetailleerd overzicht van de inhoud van dit schema is in kort bestek niet te geven en moet daarom hier achterwege blijven.

Besloten werd met ingang van 1 september 1965 aan 7 scholen proeven te ondernemen volgens deze richtlijnen. Omdat het schema veel minder scherp is omschreven dan de bij de meetkunde gebruikte syllabus, en dat wellicht ook thans nog niet zijn kan wegens de veelheid van problemen waaromtrent de gedachten nog niet zijn uitgekristalliseerd, is een werkgroep samengesteld die aan deze proeven leiding zal geven. De scholen, die eraan deelnemen, zijn:

Stedelijk Lyceum	Zutphen,
Rijks H.B.S.	Zwolle,
Stedelijk Gymnasium	Arnhem,
Triniteits Lyceum	Haarlem,
2e Christelijk Lyceum	Zeist,
Rijnlands Lyceum	Oestgeest,
2e Vrijzinnig Christelijk Lyceum	's-Gravenhage.

De werkgroep zal periodiek bijeenkomen om de gerezen problemen te bespreken. De Commissie verwacht dat zij in staat zal zijn zich uit de ervaringen die de bij de proefnemingen betrokken leraren in de werkgroep kunnen uitwisselen en uit de daaruit ontstane gedachtenwisselingen een positief beeld te vormen omtrent het probleem hoe een modern leerplan voor de algebra en de analyse er in de toekomst zal moeten uitzien.

De proef strekt zich uit over twee cursusjaren. Het is dus duidelijk dat dit project invloed zal hebben op de eindexamens van deze scholen, dus in 1967. Hierover zijn door de Commissie besprekingen gevoerd op het Ministerie van Onderwijs, waar men bereid bleek medewerking te verlenen aan daartoe te nemen maatregelen. Bij Koninklijk Besluit van 6 september 1965, Stbld 402, zijn dan ook de nodig geachte wijzigingen in de eindexamenreglementen aangebracht. Deze houden in dat de opgaven voor het schriftelijk examen voor te leggen aan de kandidaten, die bij de proeven zijn ingeschakeld, niet dezelfde behoeven te zijn als die voor de overige kandidaten.

4. *Project meetkunde.*

In een subcommissie vinden besprekingen plaats aangaande de methode te volgen bij het onderwijs in de analytische meetkunde, in het bijzonder over de problemen samenhangende met de invoering van vectoren. De voorbereidingen voor proefnemingen zijn in een vergevorderd stadium.

Namens de Commissie Modernisering
Leerplan Wiskunde,

Prof. dr. A. F. Monna,
Secretaris.

DE OPBOUW VAN EEN WISKUNDE-PROGRAMMA VOOR DE NIET-MATHEMATISCHE RICHTINGEN VAN HET H.A.V.O. [1])

door

G. KROOSHOF

Groningen

Wiskunde is een bijzonder wetenschappelijk en maatschappelijk verschijnsel. Alleen, wie haar zelf bedreven heeft, kan haar betekenis begrijpen.

1. Doelstellingen

In 1959 heeft de Wiskunde-Werkgroep van de W.V.O. aandacht besteed aan de doelstellingen van het wiskunde-onderwijs. Uit de discussies daarover zijn enkele gewichtige onderscheidingen voortgekomen. Men vindt die o.a. vermeld in het Mededelingenblad van de Werkgroep van juni 1959. Hierin wordt een verslag gegeven van een referaat van Dr. van Hiele. Deze schrijft over dit onderwerp eveneens in een artikel in Euclides, **35** (1960) p. 177. De hoofdzaken wil ik hieronder even vermelden. In de eerste plaats werd onderscheid gemaakt tussen subjectieve en objectieve doelen.

Subjectieve doelen zijn bijvoorbeeld het bevorderen van de activiteit, het esthetisch beleven, de creativiteit van de leerling, enz. Van Hiele zegt hierover: *Hoewel de subjectieve doelen uiterst belangrijk zijn, kunnen ze niet bepalend zijn voor de inhoud van het vak.* Alleen de leraar in zijn les kan het verwerkelijken van de subjectieve doelen bereiken door zijn enthousiasme, zijn speciale belangstelling, enz.

Objectieve doelen kunnen zijn: de cultuuroverdracht, het bevorderen van het kritisch denken, de toepasbaarheid voor de maatschappij of de wetenschap, het wiskundig of logisch leren ordenen, enz.

Deze objectieve doelen kunnen nog gesplitst worden in materiële en formele doelen. Een materieel doel treffen we aan bij die onderwerpen uit de wiskunde, die om zichzelfs wil geleerd worden, bijv. de

[1]) Voordracht gehouden voor de Wiskunde Werkgroep van de W.V.O. op 27 maart 1965.

stelling van Pythagoras, de *abc*-formule voor de vierkantsvergelijking, enz.

Formele doelen zijn bijvoorbeeld: het weten wat een bewijs is, op een hoger denkniveau komen, de innerlijke structuur van de wiskunde doorzien.

Alleen de formele doelen kunnen bepalend zijn voor de inhoud van een vak. Omdat echter deze doelen slechts bereikt kunnen worden via het handelen met de materie, worden allerlei materiële doelen daarmee ook bereikt. De formele doelen komen alleen tot hun recht, als men zich bij zijn onderwijs ook werkelijk op deze formele doelen richt. Dit houdt onder meer in, dat men niet, om vlugger klaar te zijn, tot materiële doelen moet overgaan. Men moet zich niet haasten. Het bereiken van materiële doelen is nl. in het algemeen veel gemakkelijker dan het bereiken van formele doelen. Daarom neemt men op scholen met een beperkt wiskunde-programma nog al eens zijn toevlucht tot het enkel stellen van materiële doelen. Er zijn echter zeker een aantal formele doelen te bereiken, wanneer men er de tijd voor neemt, het tempo dus laag houdt, en wanneer men er de moeite voor over heeft. Het kost nl. de docent beslist meer inspanning.

In zijn artikel in Euclides zegt Van Hiele:
Bij de vaststelling van de formele doelen zal men rekening moeten houden met:

1. het intelligentiepeil van de betrokken leerlingen,
2. de ter beschikking staande tijd,
3. de niveaustructuur van het betrokken vak,
4. de formele waarde van het vak in verband met de bestemming van de leerlingen,
5. de vooropleiding van de leerlingen,
6. de vraag of de betrokken leraren in staat zijn de gestelde doelen te verwezenlijken. (Van Hiele denkt hier bijv. aan het invoeren van het vak statistiek, terwijl de meeste wiskundedocenten niet in staat zullen zijn dat vak te onderwijzen.)

2. De objectieve doelen

Gaan we nu na, welke objectieve doelen we moeten stellen voor de niet-mathematische richtingen van het h.a.v.o. De meeste leerlingen daarvan zullen behoren tot de literair-culturele richting, die te vergelijken is met de tegenwoordige m.m.s. Zij zullen o.a. toegang krijgen tot de tweede leerkring van de kweekschool. Voor leerlingen, die deze beroepskeuze doen is het hierna te schetsen programma zeker van belang omdat ze de didactiek van het rekenen

moeten kunnen begrijpen, o.a. door een juist *inzicht in de opbouw van de getallenwereld en de betekenis van de operaties daarin.* Ook al zouden ze echter in hun verdere beroep weinig of niet meer met wiskunde te maken krijgen, dan nog is een kennismaking met dit vak noodzakelijk, omdat wiskunde een bijzonder maatschappelijk verschijnsel is, dat slechts begrepen kan worden door hen, die er zelf mee gewerkt hebben. Het zal echter duidelijk zijn, dat dit werken niet moet betekenen het oplossen van allerlei door de traditie voorgeschreven vraagstukken. Voor hen moet het formele doel zijn: *het verwerven van inzicht in de innerlijke structuur van de wiskunde.*

Van veel mensen wordt geëist, dat ze de vaardigheid bezitten om in het materiaal, waarmee ze werken of dat ze bestuderen, relaties en logische structuren te ontdekken. De mogelijkheid daartoe moet door wiskunde-onderwijs worden voorbereid. De studie der structuren, relaties en verzamelingen dringt steeds meer door ook in studievakken, die op het eerste gezicht geen wiskundig aspect hebben, bijvoorbeeld de studie van het Nederlands. (Men zie bijv. het boek Syntactic Structures door Noam Chomski of een artikel als Mathematisierung der Grammatik door Baumgärtner). *Het inzicht in de mogelijkheid om een wiskundige ordening aan te brengen moet dus een der objectieve doelen van het wiskunde-onderwijs zijn.*

3. De formele doelen

Het primair stellen van de formele doelen heeft tot gevolg, dat we om een wiskunde-programma te karakteriseren niet een doelstelling kunnen gebruiken als: Vereiste *kennis* aan het eind van het derde leerjaar. Inplaats daarvan zullen we ons moeten richten op vereiste *inzichten.*

Ik wil daarbij centraal stellen het *inzicht in de betekenis van de begrippen relatie en functie.*

Relaties kunnen daarbij eerst gezien worden als predikaten met één of meer variabelen en later als verzamelingen van geordende paren, niet alleen getallenparen, maar ook paren van figuren, van personen, van dingen enz.

Functies kunnen optreden als bijzondere relaties, maar ook als afbeeldingen. Relaties en afbeeldingen moeten zowel in de algebra, als in de meetkunde, als bij voorbeelden gekozen uit het maatschappelijk leven, herkend en gehanteerd kunnen worden. Het spreekt van zelf, dat men de te behandelen voorbeelden eenvoudig moet kiezen. Vooral belangrijk is het daarbij te letten op de taalkundige aspecten van de relatieleer. Deze taal staat dichter bij het logische

denken dan de omgangstaal en het is juist de verfijning van het taalgebruik, waarbij ook de symbolen als $\in$, $\cap$, $\cup$ een belangrijke rol spelen, die uitermate waardevol geacht moeten worden voor deze h.a.v.o.-leerlingen.

Noodzakelijk voor het inzicht in de leer der relaties en functies is enige kennis van de verzamelingentheorie. Dat zou dus een materieel doel genoemd kunnen worden. Echter spelen de verzamelingen op zichzelf in het huidige denken zo'n belangrijke rol en is deze theorie zo toepasbaar op allerlei verschijnselen, dat men het inzicht in deze toepasbaarheid rustig als formeel doel kan beschouwen.

Naast de zojuist vermelde formele doelen, wil ik nog twee andere noemen; het eerste daarvan luidt:

Inzicht in de meetkundige structuur van zowel vlakke als ruimtelijke figuren. Dit inzicht moet worden verkregen door het „handelen" met figuren, d.w.z. het tekenen en het vervaardigen daarvan (het maken van uitslagen is een goede aanleiding tot het construeren van nauwkeurige planimetrische figuren). Verder moeten het spiegelen, draaien en verschuiven zowel met knipsels, als met behulp van passer en lineaal en ook door het gebruiken van een spiegel het inzicht versterken. Dat na het aanleren van een eenvoudige tekenmethode ook zulke transformaties op ruimtefiguren kunnen worden toegepast is gebleken in een tweede klas van een m.m.s.

Het tweede formele doel, dat ik nog zou willen noemen, kan m.i. alleen bereikt worden als de tijd het toelaat de leerlingen op het daarvoor vereiste denkniveau te brengen. Het zou als volgt geformuleerd kunnen worden: *Inzicht in de deductieve opbouw van een stukje wiskunde,* dat beslist geen meetkunde behoeft te zijn. Iets minder veeleisend is misschien de volgende formulering: *Inzicht in het verschil tussen definitie en stelling.* Misschien kan dit bereikt worden door in de verzameling der vierhoeken een klassenindeling aan te brengen, nadat bij de hierboven genoemde oefeningen de kenmerkende overeenkomsten en verschillen tussen verschillende vierhoeken zijn gebleken.

Maar dat kan pas, als zowel de verzamelingenleer, als de meetkundige beschouwingen ver genoeg gevorderd zijn. Het is wel noodzakelijk om bij formuleringen van de eigenschappen van figuren gebruik te maken van de woorden „elke" of „iedere", bijv. de som der hoeken van *elke* driehoek is 180°. Daarbij kan dan steeds de getekende driehoek opgevat worden als representant van de verzameling der driehoeken.

4. Het opstellen van een programma

Wanneer de in 3 genoemde formele doelen zijn aanvaard, dan betekent het opstellen van een programma o.a.:

1. het vermelden van het wiskundig materiaal, dat men nodig denkt te hebben. Het opsporen daarvan kan het gemakkelijkst geschieden door van „boven af" te werken. Hierdoor kan een „kernprogramma" ontstaan van materiële en formele doelen, die voor het bereiken van de in 3 genoemde doelen noodzakelijk zijn. Dit kernprogramma kan dan zo mogelijk worden aangevuld met onderwerpen, die vooral te maken zullen hebben met de subjectieve doelen van de docent. Daardoor kan het programma een persoonlijke kleur krijgen.
2. De plaatsing van dit materiaal in een leergang. Sommige onderwerpen hoeven niet op een vaste plaats genoemd te worden. Zo kunnen we het oplossen van vergelijkingen aan de orde stellen, wanneer andere onderdelen daartoe aanleiding geven. Bijvoorbeeld, als bij een functie de functiewaarde gegeven is en de waarde van het argument wordt gevraagd. Het is daarbij wenselijk geen methoden voor het oplossen van vergelijkingen te onderwijzen, maar de vaardigheid te ontwikkelen deze naar bevind van zaken op te lossen. Zo moet een leerling bijvoorbeeld de vergelijking $7 + (3x - 2) = 12$ niet oplossen door haken verdrijven, optellen en naar één kant brengen, enz. maar hij moet onmiddellijk zien, dat $3x - 2 = 5$, omdat $7 + 5 = 12$ is.
3. Het zoeken van passende voorbeelden, die noodzakelijk zijn om bij elk nieuw onderwerp de passende intuïtieve inleiding te verschaffen. Vooral hierbij zal veel gevergd moeten worden van de vindingrijkheid van de docent, omdat geheel nieuwe onderwerpen ook geheel nieuwe voorbeelden noodzakelijk maken.

5. Het materiaal

Omdat ik relaties en functies centraal gesteld heb, begin ik met een opsomming van de belangrijkste daarvan, die in het programma thuis horen. Deze opsomming zal voor een deel moeten bestaan uit *voorbeelden*, omdat immers niet het *kennen* van verschillende relaties ons doel is, maar het *inzicht* in het wezen van de relatie zelf.

Boven aan de lijst plaats ik de *equivalentierelaties*. Het kunnen herkennen van de drie eigenschappen daarvan en het inzicht, dat een equivalentierelatie een klassenindeling geeft is uiterst gewichtig. Er moeten dus een voldoende aantal relaties de revue gepasseerd zijn (zowel uit de wiskunde, als uit het sociale leven) om het onder-

scheid tussen wel en niet equivalent duidelijk te kunnen maken.

Dan relaties, die geschreven zijn met de tekens $=$, $<$ of $>$, bijv.

$$\{(x, y)|y = x^2\},\quad \{(x, y)|y < x^2\},\quad \{(x, y)|y > x^2\}.$$

Hierbij moeten de in een Cartesisch coördinatenstelsel bijbehorende puntverzamelingen worden getekend. Het is gewenst daarbij de getallen x en y uit begrensde gebieden te laten kiezen of bijv. alleen natuurlijke getallen toe te laten.

Twee belangrijke relaties, die eigenlijk functies zijn, maar het is de vraag of we daar in deze afdeling van het h.a.v.o. zo'n uitdrukkelijk onderscheid tussen moeten maken, zijn de relaties recht- en omgekeerd-evenredig-zijn, bijv. te schrijven in de vorm

$$\{(x, y)|y = 4x\} \quad \text{en} \quad \left\{(x, y)|y = \frac{12}{x}\right\}.$$

Relaties met drie variabelen vinden we in de meetkunde: oppervlakten van figuren, bijv. $\{(x, y, O)|O = x \cdot y\}$ de stelling van Pythagoras $\{(x, y, z)|z^2 = x^2 + y^2\}$.

De stelling van Pythagoras kan afgeleid worden in een rooster. Hij kan geïntroduceerd worden op de volgende manier: Als ik een rechthoekige driehoek wil tekenen, dan heb ik na het construeren van de rechte hoek de vrije keuze voor de lengten van de rechthoekszijden. Maar de lengte van de schuine zijde is dan vastgelegd. Welke relatie is het, die deze lengte van de schuine zijde toevoegt aan de gekozen lengten van de rechthoekszijden?

Tenslotte noem ik nog enkele meetkundige relaties, die niet mogen ontbreken, nl. de congruentie en de gelijkvormigheid, evenwijdigheid en loodrechte stand. Deze moeten niet alleen in planimetrische, maar van het begin af ook in stereometrische figuren worden herkend. De congruentie moet als intuïtief kenmerk hebben „het-niet-van-elkaar-te-onderscheiden-zijn", de gelijkvormigheid moet als vergroting of verkleining geïntroduceerd worden.

Spiegelen, draaien, verschuiven, uitrekken, afschuiven, vermenigvuldigen zijn afbeeldingen, die voldoende ervaringsmateriaal moeten verschaffen. Bijna altijd kan men deze afbeeldingen doen plaatsvinden in figuren getekend in een rooster.

Welk materiaal is er nu nodig om met de bovengenoemde relaties te kunnen werken?

A. de eenvoudigste begrippen van de verzamelingenleer: lidmaatschap, doorsnede, unie, totaalverzameling, complementverzameling, lege verzameling, deelverzameling.

Men moet vooral beginnen met eindige verzamelingen. Eerst die,

waarvan men de leden noemt door opsomming, daarna die, waarvan een kenmerk voor het lidmaatschap genoemd kan worden.

Het gebruik van Venn-diagrammen moet de belangrijkste grondbegrippen verduidelijken.

De verzamelingenleer moet tenslotte functioneren in de volgende gebieden:

a. het kennen van de belangrijkste getallenverzamelingen (natuurlijke, rationale, reële getallen),
b. de relaties (en functies) als verzamelingen van paren, drietallen, enz.
c. enkele puntverzamelingen in de meetkunde: cirkel, bol, middelloodlijn, middelloodvlak (uit overwegingen van symmetrie ook als verzamelingen van punten met gelijke afstanden tot twee gegeven punten); ellips en parabool kunnen hieraan misschien toegevoegd worden, als ze construerend worden behandeld.
d. enkele verzamelingen van figuren in de meetkunde, bijv. de verzameling der vierhoeken, waarin door aan deze vierhoeken bepaalde eisen te stellen deelverzamelingen kunnen worden aangewezen.

B. In de algebra

a. het gebruik van de letter als variabele. Dit kan bijv. geoefend of ingevoerd worden door de operaties van de rekenkunde te behandelen en de eigenschappen daarvan als volgt te formuleren:
   Voor elk getal, dat we voor a en voor b zouden willen kiezen, is $a + b = b + a$.
   Het is wenselijk, waar dat maar enigszins mogelijk is, zulke uitdrukkingen als: voor elk getal, „dat we voor a kunnen kiezen" te gebruiken. Het invoeren van quantoren met behulp van symbolen lijkt me op beperkte schaal mogelijk, maar een omschrijving daarvan in zulke zinnen als de genoemde noodzakelijk. Ook het werken met getallenrijen kan het invoeren van de letter als variabele vergemakkelijken.
b. Het rekenen met deze variabelen, in het bijzonder de eigenschappen voor het rekenen met machten en het rekenen met tweetermen. Als merkwaardige produkten zouden geleerd kunnen worden $(a + b)^2$, $(a - b)^2$ en $(a + b)(a - b)$.
c. het gebruik van de getallenlijn voor het rekenen met negatieve en positieve getallen en het ordenen van de getallen met

inbegrip van de rationale getallen. Wanneer de tijd het toelaat kan men via de stelling van Pythagoras de tweedewortels introduceren. Het is eigenlijk wel gewenst, dat de leerlingen van deze afdeling kennis maken met de irrationale getallen en deze via een constructie hun plaats kunnen geven op de getallenlijn.

d. het zeer vroegtijdig invoeren van een Cartesisch coördinatenstelsel. Ook in de meetkunde kan dat van het begin af functioneren.

C. *In de meetkunde*

In het bovenstaande is al voldoende tot uiting gekomen, dat de meetkunde door mij niet bedoeld wordt als een deductief systeem van stellingen met hun bewijzen (althans niet voor deze tak van het h.a.v.o.). „Bewijzen" zullen meer op intuïtieve wijze gegeven moeten worden, bijv. door gebruik te maken van de eigenschappen van het rooster, waarin de figuren getekend zijn. Zo kan bijv. na de kennismaking met het meten van hoeken met graden, in een netwerk van drie stellen evenwijdige lijnen de gelijkheid van een aantal hoeken worden *aanvaard*, waarna de stelling voor de som der hoeken van een driehoek eveneens *aanvaard* kan worden. De meetkunde blijve dus *geheel* in het intuïtieve stadium. Wel kan men zorgvuldig eigenschappen, die ontdekt worden, formuleren en waar dat te pas komt figuren met passer en liniaal laten construeren. Bepaalde eigenschappen moeten echter zo min mogelijk worden voorgeschreven. Dit geldt ook voor constructies. Congruentiegevallen vinden nauwelijks een plaats in deze leergang. Constructiegevallen kunnen echter begrip wekken voor het voldoende zijn van het geven van drie elementen als kenmerkend voor de verzameling der driehoeken, die met een gegeven driehoek congruent zijn.
In deze opvatting is ook geen plaats voor de bekende stellingen over evenwijdige lijnen gesneden door een derde. Experimenten met netten van figuren door evenwijdige lijnen gevormd moeten echter het inzicht verschaffen, dat het evenwijdig zijn van lijnen en het gelijk zijn van sommige hoeken *gelijktijdig* optreden.
Als de gelijkvormigheid wordt geïntroduceerd met behulp van vergroten of verkleinen, later verdiept door het toepassen van de afbeelding vermenigvuldigen van figuren, dan kan het inzicht baan breken, dat bij gelijkvormige figuren het gelijk zijn van de hoeken gelijktijdig optreedt met het evenredig zijn van gelijkstandige lijnstukken. Tevens moet dan gekeken worden naar de

oppervlakten van gelijkvormige figuren.
Zo moeten de meetkundelessen dienen om de intuïtieve kennis bewust te maken en uit te breiden. Hoofddoel zij, wat ik ergens heb gelezen, dat men bepaalde structuureigenschappen van de ruimte samen met de leerlingen uitprepareert en preciseert.

6. Tenslotte

Tenslotte wil ik nu na deze algemene beschouwingen het eigenlijke werk van het opstellen van een leerplan niet meer ter hand nemen. Dat vergt nl. een zorgvuldig overwegen, dat veel tijd kost, van prioriteiten van stofonderdelen. Bij een andere gelegenheid heb ik voor het tweede leerjaar een schets van een leerplan gegeven. Zo mogelijk zal ook deze schets gepubliceerd worden. Overigens geloof ik, dat men in een afdeling als deze veel vrijheid moet geven om de volgorde met de klas samen op te bouwen. De wisselwerking tussen docent en klas moet en kan in dit schooltype gelukkig erg groot zijn.

DE WERKZAAMHEDEN VAN DE WIMECOS-COMMISSIE VOOR HET LEERPLAN EN HET EINDEXAMEN VAN DE WISKUNDE OP HET H.A.V.O.

Op 29 december 1964 heeft de voorzitter van Wimecos in zijn openingstoespraak tot de algemene ledenvergadering medegedeeld, dat het Bestuur, in overleg met en op verzoek van de Inspectie, een commissie had gevormd voor het opstellen van een wiskundeprogramma voor het h.a.v.o. Op een later tijdstip werd aan deze commissie opgedragen een aantal opgaven samen te stellen ter bepaling van het examenniveau van het vak wiskunde bij het h.a.v.o.
De leden van de commissie waren: C. J. Alders, Dr. A. van Dop, Dr. Ir. B. Groeneveld, C. de Groot en Ir. C. van Vliet.
Bij het gereedmaken van het ontwerp-leerplan wiskunde voor het h.a.v.o. hebben wij rekening moeten houden met het feit, dat de bezitters van het einddiploma h.a.v.o. in staat moeten zijn het onderwijs in de wiskunde te kunnen volgen aan alle in de Wet op het Voortgezet Onderwijs genoemde hogere beroepsopleidingen, waartoe het h.a.v.o. voorbereidt. Daarbij is vooral gedacht aan die leerlingen, die later naar een h.t.s. zullen gaan.
Het concept-eindexamenprogramma, dat tenslotte is aangeboden tijdens een bespreking van de contact commissie h.a.v.o.-

experiment met de leraren wiskunde, werkzaam aan de aan het h.a.v.o.-experiment deelnemende scholen, een bespreking o.l.v. Inspecteur Dr. A. de Jong, luidt als volgt:

Inleiding tot de theorie der verzamelingen.
Lineaire en kwadratische vergelijkingen en ongelijkheden.
Sinus- en cosinusregel met toepassingen.
Logaritmen. Gebruik van de logaritmentafel, goniometrische tafel en rekenliniaal.
Reken- en meetkundige rijen; sommeerbare meetkundige rijen.
De functies $ax + b$, $ax^2 + bx + c$, a/x, a^x, ${}^g\log x$, $\sqrt{ax + b}$, $\sin ax$, $\cos ax$, $\operatorname{tg} ax$, $a \sin x + b \cos x + c$ en hun grafieken.
Beginselen van de differentiaalrekening, afgeleide van eenvoudige algebraïsche en goniometrische functies, kettingregel, extreme waarden.
Vergelijking van rechte lijn, cirkel en parabool; snijpunten van rechte lijnen, cirkels en parabolen, ook onderling; raaklijnen; hoeken van lijnen, cirkels en parabolen, ook onderling; afstand van 2 punten en van een punt tot een lijn.
Verzamelingen van punten.
Onderlinge ligging van punten, lijnen en vlakken; hoeken en afstanden.
Viervlak, vierzijdige piramide, recht prisma; doorsneden.
Cilinder, kegel, bol.
Oppervlakte en inhoud van de genoemde lichamen.

Door de commissie is overwogen in hoeverre de vernieuwing van het wiskunde-onderwijs bij het opstellen van het concept-leerplan een kans kon worden geboden. In dit opzicht heeft zij zich sterk moeten beperken omdat zij niet wil vooruitlopen op te verwachten publikaties van de Commissie Modernisering Leerplan Wiskunde en omdat de tijd dringt, want de eerste eindexamens h.a.v.o. komen in 1968. Bovendien eist de vernieuwing de oplossing van vele didactische vragen en deze oplossing is nog niet afdoend gegeven.

Alleen de leer der verzamelingen maakt hierop een uitzondering. In het ontwerp-leerplan hebben wij opgenomen:

„Gebruik van de begrippen verzameling, lege verzameling, deelverzameling, complement, doorsnede en vereniging".
en „De functie als afbeelding van een verzameling".

Erkend moet worden dat het toevoegen van deze leerstof maar een geringe bijdrage tot de vernieuwing betekent. Bedacht moet

echter worden dat een groot deel van de hogere beroepsopleidingen de traditionele wiskunde vraagt.

De commissie stelt zich echter het leerplan niet als definitief voor.

In februari 1966 zal van onze hand verschijnen een verzameling van 36 stellen examenwerk van de wiskunde van het h.a.v.o. Bij deze verzameling is tevens gevoegd het voorgestelde leerplan en daarover een vrij uitgebreide toelichting. We menen, dat deze uitgave van de h.a.v.o.-docenten van essentieel belang is.

Uit het concept-leerplan zal blijken dat: bij de *algebra* ingewikkelde samengestelde breuken geschrapt zijn, niet toelaatbaar zijn vraagstukken, waarin de som en(of) het produkt van de wortels een te grote rol spelen, de integraalrekening weggelaten is; bij de *meetkunde* om- en ingeschreven cirkel niet voorkomen, onderling onmeetbare lijnstukken niet behandeld moeten worden, de regelmatige veelhoeken beperkt worden tot de 3-, 4- en 6-hoek, koordenvierhoeken niet voorkomen; bij de *stereometrie* om- en ingeschreven bollen vervallen; bij de *analytische meetkunde* geen ellips en hyperbool voorkomen, de begrippen pool en poollijn vervallen; bij de *goniometrie* uitsluitend met radialen wordt gewerkt.

In de uitgave „*Eindexamenopgaven Wiskunde voor het h.a.v.o.*" zijn daarom nog opgenomen:

1° tafels van de goniometrische verhoudingen waarbij de hoeken in radialen en in delen van π-radialen zijn gegeven en

2° een beknopte theorie, voorzien van vraagstukken, over de leer der verzamelingen voor zover deze nodig is voor het h.a.v.o.

Namens de Commissie,
B. Groeneveld (voorzitter).

ONDERWERPEN UIT DE MODERNE WISKUNDE

In het eerste nummer van de vorige jaargang hebben wij de leraren, die geëxperimenteerd hebben met moderne onderwerpen in hun onderwijs, gevraagd om hierover in te lichten. Hierop hebben wij 16 antwoorden ontvangen.

Wij danken de inzenders voor de moeite, die zij zich gegeven hebben; hun ervaringen zullen ons van groot nut zijn. Mogen wij degenen, die nog niet geschreven hebben, nog eens opwekken om het alsnog te doen?

F. v. d. Blij
C. J. Alders
(Haarlem, Verspronckweg 68)

WIMECOS

AGENDA VAN DE ALGEMENE VERGADERING VAN WIMECOS

op dinsdag 28 december 1965 in „Esplanade", Lucas Bolwerk, Utrecht.

Aanvang: 10.30 uur.

1. Opening door de voorzitter dr. ir. B. Groeneveld.
2. Notulen van de algemene vergadering van 29 december 1964 *).
3. Jaarverslagen:
   a. van de secretaris *).
   b. van de penningmeester,
   c. van de kascommissie *),
   d. van de redactie van „Euclides" *),
   e. van de commissie voor de leesportefeuille *).
4. Décharge van de penningmeester en benoeming van de nieuwe kascommissie.
5. Bestuursverkiezing wegens periodiek aftreden van de heren C. J. Alders en dr. P. G. J. Vredenduin. Het bestuur stelt beide aftredenden kandidaat.
6. Bespreking van het bestuursvoorstel om de contributie voor het verenigingsjaar 1966—1967 vast te stellen op *f* 9,—.
7. Voordracht van de heer prof. dr. F. van der Blij, hoogleraar aan de Rijksuniversiteit te Utrecht: *„Algebra en Analyse in de hoogste klassen van het toekomstige V.W.O."*.

   PAUZE

8. Voordracht van de heer dr. P. Bronkhorst (Eindhoven): *„Spitsvondigheden in de klassieke getallentheorie."*
9. Rondvraag.
10. Sluiting.

NOTULEN VAN DE ALGEMENE VERGADERING VAN WIMECOS

op 29 december 1964 in „Esplanade" te Utrecht.

Om 10.35 uur opent de voorzitter dr. ir. B. Groeneveld de vergadering. Hij heet alle aanwezigen van harte welkom, in het bijzonder de ereleden prof. dr. O. Bottema, drs. A. J. S. van Dam, dr. J. H. Wansink en P. Wijdenes, de inspecteurs van het VHMO, dr. D. N. van der Neut en drs. B. J. Westerhof, de vertegenwoordigers van de zusterorganisaties, de heren ir. J. H. van der Horst (Velines), D. Leujes (Liwenagel) en drs. H. C. Vernout (Werkgroep WVO), en de sprekers prof. dr. B. van Rootselaar en drs. H. G. Brinkman. De voorzitter deelt mede dat het bestuur mr. ir. M. Goote heeft gevraagd te komen spreken over de wiskunde van het toekomstige V.W.O., maar dat deze verhinderd was de uitnodiging te aanvaarden; bovendien, dat bericht van verhindering is binnengekomen van dr. W. H. Capel, inspecteur van het VHMO, dr. J. B. Drewes, raadadviseur in algemene dienst, dr. J. A. A. Verlinden, chef van de hoofdafdeling VHMO, drs. A. M. Koldijk, redactiesecretaris van „Euclides", G. J. J. Boost van de Leesportefeuille van Wimecos, dr. J. J. van Hercke en van Velibi.
De presentielijst blijkt door 48 leden getekend te zijn.

De voorzitter houdt zijn jaarrede; deze zal in „Euclides" worden gepubliceerd. Aan het einde van zijn rede dankt de voorzitter het aftredende bestuurslid drs. H. W. Lenstra voor de voortreffelijke wijze waarop deze zich heeft gekweten van

*) In dit nummer afgedrukt.

de taak van tweede secretaris en voor de vele goede adviezen die hij het bestuur heeft verstrekt; de voorzitter wenst de heer Lenstra veel succes toe in zijn nieuwe werkkring, de Universiteit van Amsterdam.

Naar aanleiding van de notulen van de jaarvergadering van 1963/1964 vraagt drs. H. Pleysier naar het resultaat van de overwegingen die door de voorzitter in die vergadering zijn toegezegd.

De voorzitter verwijst in zijn antwoord naar de mededeling in zijn rede gedaan over de pogingen van het bestuur om subsidie in de reiskosten van bezoekers der jaarvergadering te verkrijgen; hij deelt mee dat een buitenlander als spreker was uitgenodigd, dat deze echter verhinderd was in deze kerstvakantie naar Utrecht te komen en dat het bestuur hoopt en verwacht hem volgend jaar als spreker te mogen begroeten.

Hierna worden de notulen goedgekeurd.

De jaarverslagen van de secretaris, van de penningmeester, de kascommissie, de redactie van „Euclides" en van de Commissie van de Leesportefeuille worden goedgekeurd.

Op voorstel van de Kascommissie, bestaande uit de heren drs. H. C. Vernout en drs. A. M. Kokkelkoren, wordt de penningmeester décharge verleend. In de nieuwe kascommissie worden benoemd drs. A. M. Kokkelkoren en drs. B. Kleefstra.

Bij de bestuursverkiezing wordt herkozen het aftredende bestuurslid drs. J. D. de Jong en wordt ir. C. van Vliet in de vacature die ontstaan is door het aftreden van de heer Lenstra, gekozen.

Daarna komt het bestuursvoorstel, de contributie voor het volgende verenigingsjaar vast te stellen op f 9.— aan de orde.

De heer drs. W. E. de Jong stelt een verhoging tot f 10.— van de contributie voor: de voorzitter antwoordt, dat het bestuur verwacht de contributie voorlopig op f 9.— te kunnen handhaven.

De heer D. Leujes vraagt wat de contributie zal bedragen voor leden die het lidmaatschap van Wimecos combineren met dat van Liwenagel en „Euclides" uit hoofde van het laatste verkrijgen; de penningmeester antwoordt: f 3.50, zijnde het verschil van f 9.— en de abonnementsprijs van „Euclides" voor leden van Wimecos.

Hierna wordt het bestuursvoorstel aangenomen.

De heer Lenstra vraagt het woord; hij bedankt de voorzitter voor diens vriendelijke woorden en wenst het bestuur van Wimecos toe, dat de goede geest van samenwerking het mag blijven bezielen.

De heer van der Neut sluit aan bij de woorden van waardering die de voorzitter heeft gesproken jegens de heroriënteringscursus; hij deelt mee dat de subcommissie voor deze cursussen plannen maakt voor de komende jaren, dat de cursus van september 1965 de opbouw van de meetkunde vanuit groepentheoretisch standpunt zal behandelen, dat verzoeken zijn binnengekomen voor een vroeger beschikbaar stellen van de syllabus, dat bij de medewerkende hoogleraren daartegen bezwaren bestaan, maar dat aan het verzoek tegemoet wordt gekomen door middel van het advies, te bestuderen: I. M. Yaglom, *Geometric Transformations*, Random House (New York); dat de leraren die het contact met de subcommissie onderhouden, zal worden verzocht hun medewerking aan de distributie van dit boekje te verlenen.

Hierna volgt een kleine onderbreking voor de koffie.

De voordracht van prof. dr. B. van Rootselaar over „*Het getalbegrip bij Bernard Bolzano*" zal worden gepubliceerd in Euclides.

Nadat de voorzitter de spreker heeft bedankt voor zijn boeiende voordracht en

door de spreker enige vragen zijn beantwoord, schorst de voorzitter om 12.35 uur de vergadering.

Om 14.15 uur wordt de vergadering hervat; de voorzitter geeft het woord aan drs. H. G. Brinkman die spreekt over de heroriënteringscursussen voor leraren in Amerika. Na deze voordracht dankt de voorzitter de spreker.

Bij de rondvraag dankt de heer Westerhof mede namens zijn ambtgenoot, de heer van der Neut, voor de uitnodiging, deze vergadering bij te wonen; mede namens de andere zusterverenigingen dankt de heer Leujes als vertegenwoordiger van Liwenagel.

De heer Wansink merkt op dat de heer Boost telkenjare verhinderd is de jaarvergadering bij te wonen; hij verzoekt het bestuur hem de dank van de vereniging voor het vele werk dat hij door het beheer van de leesportefeuille doet, langs schriftelijke weg te doen geworden; de voorzitter zegt dit toe.

Om 16.40 uur sluit de voorzitter de vergadering na zijn spijt over het kwantitatief matige bezoek van deze jaarvergadering te hebben geuit, na beloofd te hebben te zullen blijven zoeken naar middelen om het bezoek aan de jaarvergadering te stimuleren en na, op verzoek van een der leden, aangespoord te hebben tot lidmaatschap van wiskundige disputen zoals *Bernoulli*, *Pi* en *Stieltjes*.

VERSLAG VAN HET VERENIGINGSJAAR
1 september 1964 - 31 augustus 1965.

De vereniging telde op 1 september 1964 642 leden, op 31 augustus 1965 652 leden. De algemene vergadering werd gehouden op 29 december 1964 in „Esplanade" te Utrecht. Het aftredende bestuurslid drs. J. D. de Jong werd herkozen; in de vacature, ontstaan door het aftreden van drs. H. W. Lenstra, werd gekozen ir. C. van Vliet, die de taak van tweede secretaris op zich nam. De voordrachten werden gehouden door prof. dr. B. van Rootselaar en drs. H. G. Brinkman; de eerste sprak over „Het getalbegrip bij Bernard Bolzano", de tweede over „Heroriënteringscursussen voor leraren in U.S.A.".

Door de H.A.V.O.-commissie o.l.v. dr. A. de Jong, coördinerend inspecteur, zijn met medewerking van het Wimecos-bestuur een leerplan en een eindexamenprogramma opgesteld. Op grond hiervan heeft een commissie van Wimecos, op verzoek van de inspectie, een aantal opgaven samengesteld, die kunnen dienen als leidraad bij de eerstvolgende examens wiskunde van het H.A.V.O. Deze opgaven zullen, voorzien van een inleiding in februari 1966 in druk verschijnen.

De vakantiecursus, georganiseerd door het Mathematisch Centrum, werd op 30 en 31 augustus te Amsterdam en op 31 augustus en 1 september te Eindhoven gehouden; het centrale onderwerp was „Getallentheorie".

Het bestuur heeft in dit jaar vijfmaal vergaderd.

De verhouding tot de zusterorganisaties was uitstekend.

VERSLAG VAN DE KASCOMMISSIE

Haarlem, 23 september 1965

Aan de ledenvergadering van de
Vereniging „WIMECOS"

Ondergetekenden A. M. Kokkelkoren en B. Kleefstra verklaren dat zij op bovengenoemde datum de boeken van de penningmeester, de heer J. D. de Jong hebben gecontroleerd en in orde bevonden.

Zij spreken hun grote waardering uit voor de wijze, waarop ook ditmaal weer de financiën zijn beheerd en voor de duidelijke en overzichtelijke wijze waarop de boekhouding wordt gevoerd.

Zij stellen de vergadering voor de penningmeester décharge te verlenen over het in het afgelopen verenigingsjaar gevoerde beleid onder dankzegging voor de wijze, waarop vele en tijdrovende werkzaamheden zijn verricht.

w.g. A. M. Kokkelkoren,
B. Kleefstra.

JAAROVERZICHT VAN DE TIJDSCHRIFTENCIRCULATIE WIMECOS 1964/1965

Op dit ogenblik is het ledenaantal 32 (verleden jaar 38), er komen aan abonnementsgelden binnen f 260.— (verleden jaar f 286.—, daarvoor resp. f 302.— en f 340.—).

De uitgaven bedroegen f 279,97, waarin zit opgesloten de post inlegvellen f 72,86, 'n bedrag dat voorheen f 48 was, maar gestegen is door de duurdere grondstoffen, terwijl voor elke zending een enveloppe à 13 ct moet worden gebruikt, willen de tijdschriften héél door de circulatie komen.

De tendens is dus minder inkomsten en veel hogere uitgaven, hetgeen een minder prettig beeld is voor de komende maanden.

De schatting voor het jaar 1965/1966 is; inkomsten f 230.—, uitgaven f 230.—, zodat de balans nog in evenwicht is, maar de vraag blijft: wat zullen de prijzen van de abonnementen op de buitenlandse tijdschriften doen?

Ondanks dit zal de circulatie blijven voortgaan en zullen wij ons allen moeten beraden of de prijs per tijdschrift niet f 2,50 of zelfs f 3,— moet worden inplaats van f 2,— nu.

Roosendaal, 15 oktober 1965 w.g. G. J. J. Boost

REDACTIEVERSLAG 40e JAARGANG EUCLIDES

Aan de besturen van Wimecos,
Liwenagel en de
Wiskundewerkgroep van de W.V.O.

De 40e jaargang van Euclides verschilt wat de aard van de inhoud betreft slechts weinig van de vorige jaargangen. Het aantal opstellen over moderne onderwerpen en over nieuwe leerplannen in het buitenland is enigszins toegenomen. Toch zou de redactie gaarne meer bijdragen van dit aard ontvangen. Ze doet daarom nogmaals een beroep op de lezers om artikelen over nieuwe onderwerpen, i.h.b. over moderne leerstof, ter plaatsing af te staan. Verschillende wijze van aanpak, voorbeelden van oefenmateriaal en wijze waarop de nieuwe leerstof in de gangbare wordt geïntegreerd, kunnen interessant zijn en aanleiding zijn tot vruchtbare discussie. Ook korte bijdragen ("Korrels") zijn welkom.

Van een uitgave van een bundel didactische opstellen, bloemlezing uit veertig jaargangen Euclides, moest na uitvoerig overleg met de firma Noordhoff worden afgezien.

De samenstelling van de redactie bleef onveranderd; de medewerking van de uitgever liet niets te wensen over.

De jaargang telde weer 320 pagina's.

27 november 1965

Namens de redactie
w.g. J. H. Wansink, voorzitter.
A. M. Koldijk, secretaris.

CONTRIBUTIE

De penningmeester verzoekt de leden, die dit nog niet deden om de contributie voor het verenigingsjaar 1965—1966 (f 9,00) over te maken naar postrekening 143917 t.n.v. Wimecos-Amsterdam. De leden, die te weinig betaalden, wordt verzocht aan te vullen.

L.I.W.E.N.A.G.E.L.

NOTULEN VAN DE LEDENVERGADERING

op donderdag 2 september 1965 om 15.00 uur in Gebouw ,,Op Gouden Wieken" te Scheveningen.

De voorzitter, Dr. P. G. J. Vredenduin, heette de aanwezigen welkom, in het bijzonder de gasten en de sprekers. Gasten waren: de Inspecteurs Groen, Poppema en Westerhof, en de heren Groeneveld (Wimecos), Schuyl (Velines), Vernout (Wiskundewerkgroep W.V.O.) en Ververs (Wolters). De notulen van de vorige ledenvergadering werden goedgekeurd en de kas was wel gecontroleerd, maar het bewijsstuk ontbrak ter vergadering, zodat de penningmeester onder voorbehoud werd gedechargeerd. Het voorstel om het bestuur uit te breiden werd aangenomen; tegenkandidaten waren er niet gesteld, zodat de heren Koksma en Korthagen verkozen werden verklaard. Het bestuur zal de functies onderling verdelen, maar wel werd al meegedeeld, dat Drs. Koksma als voorzitter zal optreden.

Vervolgens was het woord aan de eerste spreker, Drs. C. J. J. van der Maas, met als onderwerp: ,,*Betekenis van de biologie voor de mensheid*".

Na een inleiding over de waardering voor de biologie voorheen en thans en over de plaats en waarde van de biologie in het onderwijs, geeft spreker een indruk van de betekenis van de biologie voor de mensheid aan de hand van enkele voorbeelden.

De betekenis van de kennis omtrent de enzymatische processen van de stofwisseling wordt toegelicht aan de werking van het enzym phenylalaninehydroxylase. Ontbreekt dit enzym, dan ontstaat een irreversibele hersenbeschadiging, die resulteert in zwakzinnigheid. Wordt deze z.g. enzymblock direct na de geboorte ontdekt, dan kan door aangepaste voeding deze vorm van zwakzinnigheid voorkomen worden.

Behandeld wordt het wereldvoedselprobleem in verband met de snelgroeiende wereldbevolking, de bescherming van de voedselleverende gewassen tegen ziekten, vraat door herbivore organismen en tegen abiotische schadelijk werkende factoren. Bestrijding van ratten met behulp van een specifiek antibloedstollingsmiddel, of met behulp van een narcosemiddel.

Vervolgens komen aan de orde de chemische bestrijdingsmiddelen en de daaraan verbonden bezwaren: vergiftigingverschijnselen bij mens en dier door het gebruik van gechloreerde koolwaterstoffen en organische fosforverbindingen: verstoring van het biologische evenwicht in de natuur; het ontstaan van resistentie.

Van de biologische bestrijdingsmethoden en hun effect worden in het bijzonder genoemd de specifieke sexuele lokmiddelen (sexattractants), het instandhouden van een voldoende dichte vogelpopulatie, het uitzetten van sluipwespen, het invoeren van monofage onkruidvretende kevers en vlinders.

De betekenis van de ontdekking der spore-elementen (Cu, Mn, Zn, Co, B, e.a.) blijkt uit hun gunstige invloed op de groei van voedingsgewassen en op de

gezondheidstoestand van het vee, toegelicht aan sterk verbeterde korrelopbrengst van rogge en verhoogde melkproduktie.

Tenslotte geeft spreker nog een overzicht van wat op internationaal niveau gedaan wordt om voor het heden zowel als voor de toekomst op een verantwoorde wijze de natuur te exploiteren ten dienste van de mensheid en welke verantwoordelijkheden daar liggen voor de biologen, in samenwerking met chemici, metereologen, medici, technici, e.a.

Deze voordracht werd door de aanwezigen - veelal leken op dit gebied - kennelijk zeer op prijs gesteld en voorzitter Vredenduin constateerde, dat het bestuur in de keuze van de spreker uitstekend was geslaagd; en dit vond hij de grootste pluim, die de spreker gegeven kon worden.

Na de pauze sprak Dr. W. A. M. Burgers over *Groepen van eindige orde. Een didactisch experiment*". Deze voordracht zal in „Euclides" worden gepubliceerd.

Ook deze voordracht viel bijzonder in de smaak en de dankwoorden van de voorzitter werden dan ook onderstreept door een hartelijk applaus.

Door het late uur werden de dankwoorden van de gasten, die gemeenlijk bij de rondvraag aan de orde komen, bij de maaltijd uitgesproken.

De secretaris,
D. Leujes

CONGRES VAN LERAREN IN DE WISKUNDE EN DE NATUURWETENSCHAPPEN

Het 16e congres, georganiseerd door Liwenagel, Velebi, Velines en Wimecos wordt gehouden op maandag 18 april 1966 te Utrecht. Het thema voor het congres luidt: "De wetenschappelijke basis van de leraarsopleiding, mede in verband met de ontwikkeling van de exacte wetenschappen in de 20 eeuw".

Nadere mededelingen zullen te zijner tijd volgen.

De secretaris van het congres,
W. C. Riel,
Parelmoerhorst 356,
's-Gravenhage.

RECREATIE

Nieuwe opgaven met oplossing en correspondentie over deze rubriek gelieve men te zenden aan Dr. P. G. J. Vredenduin, Kneppelhoutweg 12, Oosterbeek.

144. In een zomerkamp bevinden zich een aantal jongens met allemaal verschillende namen. Een bezoeker vraagt een van de jongens hem zijn naam en de namen van zijn medekampeerders te noemen. De jongen doet dit. Hij stelt daarna dezelfde vraag aan alle andere kampeerders. Hoewel de jongens wel allen eerlijk zijn, zijn ze niet erg intelligent, zodat de bezoeker er rekening mee houdt, dat sommige jongens de namen van hun medekampeerders onopzettelijk door elkaar halen (permuteren). De bezoeker merkt nu op, dat algemeen geldt: als A aan B de naam C geeft, dan zal D aan de jongen wiens naam C is, dezelfde naam geven, die de jongen die de naam draagt welke door D aan A gegeven wordt, aan B geeft.

Er wordt gevraagd, of sommige van de jongens zich wel eens vergissen bij het naamgeven of dat allen ieder met de juiste naam aanduiden.

(naar een suggestie van L. A. Rang)

145. In „De wiskunde van morgen" (Aula 185) somt C. Stanley Ogilvy een 150-tal onopgeloste problemen op. Een ervan is het volgende (p. 22).

Een man valt overboord in een kanaal met rechte, evenwijdige oevers. Een dichte mist belemmert zijn uitzicht volkomen, zodat hij in het ongewisse verkeert in welke richting hij moet zwemmen om een van de oevers snel te bereiken. We nemen aan, dat hij al zwemmend zijn baan kan onthouden en weet welke afstand hij aflegt. Hij kent de breedte van de rivier. Wat is de kortste weg, die hij kan zwemmen in de zekerheid dan een van de oevers bereikt te hebben?

Ik zou u willen vragen, wat de kortste afstand is, die u vindt. Wilt u mij uw antwoord zenden, voorzien van toelichting hoe u eraan komt, binnen drie weken na verschijnen van dit nummer. Stelt u daarbij de breedte van het kanaal 1 en geeft u een benadering van de gevonden uitkomst in drie decimalen. Het kleinste antwoord wordt gepubliceerd.

OPLOSSINGEN

(zie voor de opgaven het vorige nummer)

142. Als het programma bestaat uit vijf films, zijn er niet meer dan 21 verschillende programmalengtes mogelijk, omdat men uit vijf begintijdstippen $4 \cdot 5 = 20$ verschillende geordende paren kan kiezen en men bovendien het gehele programma kan bijwonen. Kiest men als duur van de films 2, 5, 1, 3, 10 min. en draait men ze in deze (cyclische) volgorde, dan blijkt het mogelijk een programma te kiezen van 1, 2, 3, . . ., 21 min.

Als het aantal films zes bedraagt, zijn er niet meer dan $5 \cdot 6 + 1 = 31$ verschillende programmalengtes mogelijk. Ook hier is het aantal 31 realiseerbaar door te kiezen resp. films van 2, 3, 1, 10, 8, 7 min.

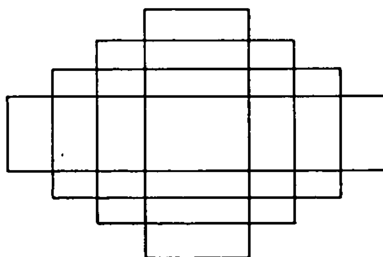
Of men dit resultaat kan generaliseren is me niet bekend. Voor opmerkingen houd ik mij aanbevolen.

143. Onderstel er zijn reeds k rechthoeken getekend. De $k+1^e$ rechthoek snijdt deze k rechthoeken in hoogstens $4k$ punten. Deze verdelen de omtrek van deze rechthoek in $4k$ delen. Elk deel kan bewerkstelligen, dat het aantal rechthoeken, dat aanwezig is, met 1 toeneemt. De $k+1^e$ rechthoek kan het aantal rechthoeken dus met maximaal $4k$ doen toenemen. Dus kunnen n rechthoeken maximaal

$$1 + 4 + 4 \cdot 2 + 4 \cdot 3 + \cdots + 4(n-1) = 2n^2 - 2n + 1$$

rechthoeken opleveren.

Dat dit aantal gerealiseerd kan worden, zien we uit onderstaande figuur.



BOEKBESPREKING

Raymond L. Wilder, *Introduction to the Foundations of Mathematics*, second edition, John Wiley & Sons, Inc., New York - London - Sydney, 1965, XVI + 327 blz., 30/—.

Het duidelijk maken van welke aard de grondslagen van de wiskunde zijn, is geen eenvoudige zaak. Wil men b.v. uitleggen, wat de betekenis van een axiomastelsel is, dan zal men eerst moeten weten, wat deductie is. En daarvoor zal men moeten weten, wat een logische theorie is. Een logische theorie echter wordt veelal in axiomatische vorm gepresenteerd. Waarmee de cirkel gesloten is. Men moet dus eenvoudig in het probleem duiken en langzamerhand de verschillende begrippen in hun onderling verband expliceren. De schrijver heeft dit dan ook gedaan en heeft zijn boek daartoe verdeeld in twee delen. Het eerste deel gaat over de fundamentele wiskundige begrippen en methoden (200 blz.), het tweede over de verschillende gezichtspunten in de fundering (100 blz.). Duidelijk is, dat een dergelijke scheiding weliswaar nuttig is, maar dat de delen eigenlijk niet gescheiden kunnen worden.

Het eerste deel is helder geschreven. De schrijver begint met een uiteenzetting van de betekenis van de axiomatische methode, aan voorbeelden toegelicht. Daarna gaat hij over op de verzamelingentheorie inclusief de paradox van Russell en weidt hij aardige beschouwingen aan het keuzeaxioma. Cardinaal-getallen komen aan de orde met daarop gegrond de invoering van de natuurlijke getallen, gevolgd door de theorie van de welgeordende verzamelingen. De theorie van het reële getal vind ik minder geslaagd, doordat hij uitgaat van de oneindig voortlopende decimale breuken. Maar dit is een kwestie van smaak. De lezer krijgt in dit deel de kans zijn kennis aanmerkelijk te verdiepen, zonder dat hij op moeilijkheden zal stuiten. De lezing ervan kan ik dan ook ieder ten zeerste aanbevelen.

Helaas kan hetzelfde niet gezegd worden van het tweede deel. Men krijgt hier de indruk in een doolhof verdwaald te raken. Dit wordt veroorzaakt door de wijze van behandeling. Deze is te oppervlakkig en te lapidair. Men krijgt niet de gelegenheid te begrijpen, waar het nu eigenlijk om gaat. Met name de drie belangrijke hoofdstukken over het logicisme, het intuitionisme en het formalisme vermogen de lezer geen inzicht bij te brengen.

P. G. J. Vredenduin

Dr. Jozef H. Leenders, *Moderne Wiskunde met opgaven; groepen - ringen vectorruimten - topologie*, Uitgeversmij n.v. Standaard-Boekhandel, Antwerpen, 1965, 494 bladz., 488 opg., 156 fig. (in afzonderlijk hulpboekje), B. Fr. 540.

Een inleiding in de studie van de algebraïsche structuren, die tegenwoordig in het middelpunt van de belangstelling staan. De voorkennis nodig voor het bestuderen van dit werk kan men putten uit het boek „Verzamelingen en Relaties" van dezelfde schrijver. Volgens de auteur wordt bij het schrijven van een boek over niet-elementaire wiskunde over het algemeen meer belang gehecht aan de wetenschappelijke standing dan aan de didaktische verwerking van de leerstof. Daardoor wordt zo'n boek onleesbaar voor wiskundig minder geschoolden. In tegenstelling daarmee heeft de auteur van het nu besproken werk ernaar gestreefd de grondbegrippen van de moderne algebra op een didactisch verantwoorde wijze bij te brengen. Naar mijn mening is hij hierin buitengewoon goed geslaagd. Het is echt een boek geworden waaruit men voor zijn plezier een avond gaat werken. Het beste is natuurlijk, het boek van het begin af rustig door te nemen. Kan men

de verleiding niet weerstaan om ergens middenin te gaan grasduinen, dan stuit men al gauw op een veelheid van symbolen en afkortingen. Gelukkig is dat geen onoverkomelijke moeilijkheid; de aanwezige lijst van de belangrijkste symbolen brengt spoedig uitkomst. Dikwijls stuit men ook op interessante nieuwe termen (voor mij althans waren ze nieuw): ,,ophopingspunt" voor verdichtingspunt, ,,transvectie of afrukking" voor afschuiving, ,,de anonieme permutatie", ,,de inwendige samenstellingswetten" van een algebraïsche structuur.

De in de titel genoemde onderwerpen worden op heldere wijze en vrij diepgaand behandeld. Het komt mij voor dat in Nederland vooral die leraren die de curcussen van de Commissie Modernisering Leerplan Wiskunde hebben gevolgd of hadden willen volgen veel aan dit boek zullen hebben. Van veel belang zijn de honderden oefeningen; het kan haast niet anders of degene die ze doorwerkt moet wel goed in deze stof thuisraken. Voor de zelfstandig werkende lezer zou misschien een antwoordenlijstje wel welkom zijn.

Voor België staat aangegeven, dat het boek, na een propedeutische cursus over verzamelingen en relaties, gebruikt kan worden in de hoogste klas van de Humanoria, in de middelbare normaalscholen en in de Voorbereidende Jaren tot de Speciale Scholen, de Candidaturen en de Hogere Technische Scholen.

In bloemrijke bewoordingen zegt de schrijver in zijn woord vooraf: ,,Bij het schrijven van dit boek heb ik mij dankbaar gevoed aan de rijke stroom van ideeën die, onder de geniale impuls van Professor Papy en zijn naaste medewerkers, nu reeds verschillende jaren lang door het wiskundige landschap vloeit."

Mogen wij ons even dankbaar tegoed doen aan wat de schrijver ons hier in zo goed verteerbare vorm aanbiedt.

Een belangwekkend boek, dat ruime bekendheid verdient. Een vergroting van het debiet zou wellicht (bij de tweede druk) ook een gunstige invloed hebben op de naar Nederlandse begrippen vrij hoge prijs.

R. Troelstra.

L. Fejes Tóth, *Reguläre Figuren*. Akadémiai KIADO, Verlag der Ungarischen Akademie der Wissenschaften, Budapest 1965, 316 pgs., 164 figuren, 12 anaglyphen.

In dit boeiend geschreven en fraai uitgevoerde werk, stelt de schrijver het probleem aan de orde die figuren te bepalen, die bij een gegeven discontinue bewegingsgroep invariant zijn; hij noemt deze: reguliere (ook wel regelmatige) figuren. Daartoe splitst hij het boek in twee delen resp. genaamd systematologie en morphologie der regelmatige lichamen. In het eerste deel geeft hij een eenvoudige inleiding in de groepentheorie en illustreert die in de meest letterlijke zin met een groot aantal (ruim 50) voorbeelden van vlakke ornamenten. Het is juist dit hoofdstuk dat in het bijzonder geschikt is om met leerlingen van het V.H.M.O. te behandelen, wanneer men hen op een aantrekkelijke wijze kennis wil laten maken met de groepentheorie. Het deel systematologie gaat verder met de behandeling van de bewegingsgroepen in de driedimensionale euclidische ruimte en geeft een opsomming van de 32-kristalklassen. Een glasheldere inleiding in de hyperbolische meetkunde mondt uit in een behandeling van de hyperbolische mozaieken, waarbij de toepassing op de theorie der modulaire functies wel genoemd, maar niet verder besproken wordt. Daarna wordt het boek voortgezet met een behandeling van de bekende 5 regelmatige convexe lichamen en de 4 regelmatige lichamen die sterveelhoeken als zijvlakken hebben. De schrijver grijpt hier de gelegenheid aan om te wijzen op het succes van de groepentheorie bij het bewijs van de stelling dat deze 4 de enige regelmatige lichamen zijn met sterveelhoeken als zijden. Een hoofdstuk,

gewijd aan de toepassingen in de n-dimensionale ruimte ($n > 3$) besluit het eerste deel van het boek.

In het tweede deel, getiteld: die Genetik der regulären Figuren, gaat de schrijver niet groepen-theoretisch maar analytisch te werk. Hij stelt pakkings- en overdekkingsproblemen aan de orde en laat zien dat regelmatige figuren gekenmerkt worden door bepaalde „Extremaleigenschaften". Ook hier passeren het euclidische platte vlak, figuren op de bol, het hyperbolische vlak, de euclidische driedimensionale ruimte (met veel aandacht voor bolstapelingsproblemen) en de meerdimensionale ruimten de revue. Dit tweede deel biedt de schrijver de gelegenheid op veel nog onopgeloste problemen te wijzen. Een uitvoerige literatuurlijst van 5 pagina's is aan het boek toegevoegd als ook een 12-tal anaglyphen.

De grote waarde van dit boek is dat het op zo heldere en boeiende wijze de toepasbaarheid aantoont van groepentheorie en analyse op meetkundige problemen. M.i. mag geen leraar dit boek ongelezen, d.w.z. onbestudeerd laten; zijn onderwijs zal er door verrijkt worden. Zoals reeds opgemerkt, kan men in een aantal extra lessen bepaalde hoofdstukken uit het eerste deel behandelen met leerlingen uit de hogere klassen; men kan daarbij verzekerd zijn van grote belangstelling!

A. W. Grootendorst

Paul Lorenz, *Anschauungsunterricht in Mathematischer Statistik I, Einführung*, 2. Auflage, S. Hirzel Verlag Leipzig, 1965, VIII + 159 blz.

De eerste druk werd besproken in Euclides 32 (1956-57), p. 198. De waardering, die ik voor deze druk had, heb ik onverminderd voor de tweede. Deze is hier en daar wat uitgebreid, omdat de schrijver, meer dan vroeger, ook rekening heeft willen houden met de behoefte aan statistiek van de economen.

P. G. J. Vredenduin

Het bestuur van Wimecos heeft de droeve plicht de leden mede te delen, dat op 24 november 1965 is overleden

Drs. J. D. de Jong,

penningmeester van de vereniging.